Wprowadzenie do logiki epistemicznej. Logiki wiedzy

(notatki do wykładów)

Andrzej Wiśniewski
Andrzej.Wisniewski@amu.edu.pl

wersja (bardzo) beta :)

W zdaniowych logikach wiedzy zamiast dwuargumentowego funktora $\mathbf{K}(a, \phi)$ („*a* wie, że ϕ”) wprowadza się jego jednoargumentowy odpowiednik $\mathbf{K}$, będący – syntaktycznie rzecz biorąc – spójnikiem jednoargumentowym. Jest to oczywiście spójnik intensjonalny.

Wyrażenie mające postać:

$$\mathbf{K}A$$

czytamy zatem:

wiadomo, że A.

Logiki wiedzy charakteryzują wiedzę niejako *in abstracto* i/lub wiedzę pewnego wyidealizowanego podmiotu epistemicznego.

W przeciwieństwie do przekonania, wiedza dotycząca sądu zakłada, że sąd ten jest prawdziwy. W konsekwencji, w każdej logice wiedzy tezą powinna być dowolna formuła o postaci:

$$\mathbf{K}A \rightarrow A.$$

Wyrażenie mające postać:

$$\neg\mathbf{K}\neg A$$

czytamy:

nie jest tak, że wiadomo, że $\neg A$

co można też wyrazić następująco:

A nie jest wykluczone (is not ruled out).

Przyjmiemy następujący schemat definicyjny:

$$\mathbf{M}A \leftrightarrow_{\mathrm{df}} \neg\mathbf{K}\neg A$$

$\mathbf{M}$ jest modalnością dualną do $\mathbf{K}$ (tak jak $\Diamond$ jest modalnością dualną do $\Box$, a $\mathbf{P}$ jest modalnością dualną do $\mathbf{C}$).

Dla porządku: modalność dualną do $\mathbf{K}$ nie zawsze oznacza się symbolem $\mathbf{M}$, my jednak przyjmiemy taką właśnie konwencję notacyjną.

Najbardziej znane zdaniowe logiki wiedzy to ***T***, ***S4*** i ***S5***. Otrzymujemy je – najogólniej rzecz biorąc – poprzez dokonanie epistemicznej interpretacji aletycznych modalnych logik zdań ***T***, ***S4*** i ***S5***. Mówiąc nieco bardziej ściśle, w aksjomatach, tezach pochodnych i regułach inferencyjnych logik aletycznych zastępujemy modalność aletyczną □ modalnością epistemiczną **K**, natomiast modalność aletyczną ◊ – modalnością epistemiczną **M**.

Rozpocznijmy od logiki wiedzy, którą można otrzymać poprzez dokonanie epistemicznej interpretacji aletycznej logiki ***S5*** – czyli od epistemicznej logiki ***S5***. Będziemy ją dalej określać po prostu mianem ***S5***, dodając przymiotniki „aletyczna” i „epistemiczna” jedynie wówczas, ich brak grozi powstaniem nieporozumień.

S5 jako logika wiedzy

Pojęcie formuły języka (epistemicznej) logiki ***S5*** określamy standardowo; operatorami epistemicznymi są $\mathbf{K}$ oraz $\mathbf{M}$.

Jak pamiętamy, dla (aletycznej) ***S5*** mamy:

$$\boldsymbol{S5} = \mathbf{KTE} = \mathbf{KT5} = \mathbf{KTB4}$$

tak więc ***S5*** można zaksjomatyzować za pomocą różnych zestawów aksjomatów specyficznych.

Budując logikę epistemiczną ***S5*** w postaci systemu aksjomatycznego, wygodnie jest przyjąć następujący zestaw aksjomatów specyficznych:

K: $\mathbf{K}(p \to q) \to (\mathbf{K}p \to \mathbf{K}q)$

T: $\mathbf{K}p \to p$

5: $\neg\mathbf{K}p \to \mathbf{K}\neg\mathbf{K}p$

i tak właśnie postąpimy.

Ponadto mamy aksjomaty rachunkowozdaniowe, definiowane standardowo.

Pierwotne reguły inferencyjne to:

RO:

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

RP:

$$\frac{A}{A\,[p_i\,/B]}$$

RG:

$$\frac{A}{\mathbf{K}A}$$

RZ:

$$\frac{B}{B[\neg\mathbf{K}\neg A \,//\, \mathbf{M}A]}$$

Z oczywistych powodów regułami wtórnymi są m.in:

RR:

$$\frac{A \rightarrow B}{\mathbf{K}A \rightarrow \mathbf{K}B}$$

RE:

$$\frac{A \leftrightarrow B}{\mathbf{K}A \leftrightarrow \mathbf{K}B}$$

oraz reguły wtórne oparte na *KRZ*.

Pojęcia dowodu i tezy budowanego systemu aksjomatycznego określamy standardowo.

Dalej mówiąc o tezach, będę miał na myśli tezy przedstawionego systemu aksjomatycznego dla (epistemicznej) ***S5***.

Skoro aksjomatem jest formuła **T**:

$$\mathbf{K}p \to p$$

a w systemie obowiązuje reguła **RP**, to każda formuła postaci:

$$\mathbf{K}A \to A$$

jest tezą. $\mathbf{K}$ spełnia więc warunek faktyczności (*factivity*), co jest wymagane dla wiedzy.

Skoro formuła **5**:

$$\neg\mathbf{K}p \to \mathbf{K}\neg\mathbf{K}p$$

jest aksjomatem, to każda formuła postaci:

$$\neg\mathbf{K}A \to \mathbf{K}\neg\mathbf{K}A$$

jest tezą. Znaczy to, że ***S5*** przypisuje podmiotom epistemicznym własność negatywnej introspekcji.

Jest oczywiste, że tezą jest formuła **E**:

$$\mathbf{M}p \to \mathbf{KM}p.$$

W ***S5*** dowodliwa jest formuła[1]:

$$\mathbf{K}p \to \mathbf{KK}p$$

a wiec każda formuła postaci:

$$\mathbf{K}A \to \mathbf{KK}A$$

jest tezą. ***S5*** przypisuje zatem podmiotom epistemicznym własność pozytywnej introspekcji.

Tezą jest również formuła **D**:

$$\mathbf{K}p \to \mathbf{M}p$$

skąd łatwo wnosimy, że tezami są też:

$$\mathbf{K}p \to \neg\mathbf{K}\neg p$$

---

[1] Dowody wielu (aletycznych odpowiedników) rozważanych tu tez zostały podane na kursie „Logika II".

$$\neg(\mathbf{K}p \wedge \mathbf{K}\neg p)$$

Komentarz: zapraszam na wykład :)

Tezą jest formuła **B**:

$$p \rightarrow \mathbf{KM}p$$

co pozwala zauważyć, że tezami są również:

$$\neg p \vee \mathbf{KM}p$$

$$\mathbf{MK}\neg p \rightarrow \neg p$$

$$\mathbf{MK}p \rightarrow p$$

Komentarz: zapraszam na wykład :)

Tezą jest też:

$$\mathbf{KM}p \rightarrow \mathbf{M}p$$

a skoro tezą jest formuła **E**, to mamy również tezę:

$$\mathbf{KM}p \leftrightarrow \mathbf{M}p$$

Jest to jedno z tzw. *praw redukcji modalności* logiki ***S5***. W rozważanej logice mamy także inne prawa redukcji, *viz*.:

$$\mathbf{MK}p \leftrightarrow \mathbf{K}p$$

$$\mathbf{KK}p \leftrightarrow \mathbf{K}p$$

$$\mathbf{MM}p \leftrightarrow \mathbf{M}p$$

skąd wnosimy, że tezami są wszystkie formuły mające postać:

$$\mathbf{KM}A \leftrightarrow \mathbf{M}A$$

$$\mathbf{MK}A \leftrightarrow \mathbf{K}A$$

$$\mathbf{KK}A \leftrightarrow \mathbf{K}A$$

$$\mathbf{MM}A \leftrightarrow \mathbf{M}A$$

a regułami wtórnymi są:

$$\frac{\mathbf{KM}A}{\mathbf{M}A} \qquad \frac{\mathbf{MK}A}{\mathbf{K}A} \qquad \frac{\mathbf{KK}A}{\mathbf{K}A} \qquad \frac{\mathbf{MM}A}{\mathbf{M}A}$$

oraz reguły będące ich „odwróceniem”.

Dygresja: W semantyce dla ***S5*** spójnik równoważności rozumiany jest standardowo. Prawa redukcji gwarantują, że gdy mamy formułę o schemacie:

$$\Gamma_1\Gamma_2\ldots\ \Gamma_{n\text{-}1}\Gamma_n\, A$$

gdzie $n > 1$, a $\Gamma_i\,(1 \leq i \leq n)$ to albo $\mathbf{K}$, albo $\mathbf{M}$, to wartość logiczna tej formuły jest taka sama, jak wartość logiczna („końcowej”) formuły $\Gamma_n\, A$. Podobnie dla formuły o schemacie:

$$\neg\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{n\text{-}1}\Gamma_n\, A$$

oraz formuły $\neg\Gamma_n\, A$. Można to zilustrować następującą tabelą:

$\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{n\text{-}1}\mathbf{K}A$	$\mathbf{K}A$
$\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{n\text{-}1}\mathbf{M}A$	$\mathbf{M}A$
$\neg\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{n\text{-}1}\mathbf{K}A$	$\neg\mathbf{K}A$
$\neg\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{n\text{-}1}\mathbf{M}A$	$\neg\mathbf{M}A$

Komentarz: zostanie podany na wykładzie :)

Tezami są:

$$\mathbf{K}(p \wedge q) \rightarrow \mathbf{K}p \wedge \mathbf{K}q$$
$$\mathbf{K}p \wedge \mathbf{K}q \rightarrow \mathbf{K}(p \wedge q)$$

A zatem tezą jest również:

$$\mathbf{K}(p \wedge q) \leftrightarrow \mathbf{K}p \wedge \mathbf{K}q$$

Tezą jest:

$$\mathbf{K}p \vee \mathbf{K}q \rightarrow \mathbf{K}(p \vee q)$$

ale <u>implikacja odwrotna</u> do powyższej <u>nie jest tezą</u>.

Natomiast tezami są:

$$\mathbf{K}(p \vee \mathbf{K}q) \rightarrow \mathbf{K}p \vee \mathbf{K}q$$
$$\mathbf{K}p \vee \mathbf{K}q \rightarrow \mathbf{K}(p \vee \mathbf{K}q)$$

a zatem również następująca równoważność:

$$\mathbf{K}p \vee \mathbf{K}q \leftrightarrow \mathbf{K}(p \vee \mathbf{K}q).$$

Tezami są:

$$\mathbf{M}(p \vee q) \rightarrow \mathbf{M}p \vee \mathbf{M}q$$
$$\mathbf{M}p \vee \mathbf{M}q \rightarrow \mathbf{M}(p \vee q)$$
$$\mathbf{M}(p \vee q) \leftrightarrow \mathbf{M}p \vee \mathbf{M}q$$

Tezą jest:

$$\mathbf{M}(p \wedge q) \rightarrow \mathbf{M}p \wedge \mathbf{M}q$$

ale <u>implikacja odwrotna nie jest tezą</u>. Tezami są jednak:

$$\mathbf{M}p \wedge \mathbf{M}q \rightarrow \mathbf{M}(p \wedge \mathbf{M}q)$$
$$\mathbf{M}(p \wedge \mathbf{M}q) \rightarrow \mathbf{M}p \wedge \mathbf{M}q$$
$$\mathbf{M}p \wedge \mathbf{M}q \leftrightarrow \mathbf{M}(p \wedge \mathbf{M}q)$$

Tezami są także następujące równoważności:

$$\mathbf{K}(p \vee \mathbf{M}q) \leftrightarrow (\mathbf{K}p \vee \mathbf{M}q)$$
$$\mathbf{M}(p \wedge \mathbf{K}q) \leftrightarrow \mathbf{M}p \wedge \mathbf{K}q$$

a więc również odpowiednie implikacje.

Odnotujmy wreszcie następujące tezy:

$$\mathbf{K}(p \vee q) \to \mathbf{K}p \vee \mathbf{M}q$$
$$\mathbf{K}(p \to q) \wedge \mathbf{K}(q \to r) \to \mathbf{K}(p \to r)$$
$$\mathbf{K}(p \to q) \to (\mathbf{M}p \to \mathbf{M}q)$$
$$\mathbf{K}(p \to q) \wedge \mathbf{M}(p \wedge r) \to \mathbf{M}(q \wedge r)$$

Implikacje odwrotne do powyższych nie są tezami, podobnie jak tezą nie jest implikacja odwrotna do formuły **K**.

Rzecz jasna nie wyczerpaliśmy tutaj wszystkich tez (epistemicznej) ***S5*** – tych jest (przeliczalnie) nieskończenie wiele :)

Pewne – ale nie wszystkie ! – spośród podanych tez są również tezami logik wiedzy słabszych od ***S5***, powstających poprzez dokonanie epistemicznej interpretacji aletycznych logik ***T*** i ***S4***. Które? Pozostawiam to Państwu jako ćwiczenie z dziedziny stosowania metody tabel analitycznych.

Semantyka dla *S5*. Tabele analityczne

Przypomnijmy pewne ustalenia z kursu „Logika II”.

Twierdzenie 10.19. *Każda teza modalnego rachunku zdań **S5** jest prawdziwa w klasie tych wszystkich struktur modelowych, w których relacja alternatywności jest relacją równoważnościową.*

Bez dowodu podamy:

Twierdzenie 10.20 (o pełności rachunku ***S5***). *Każda formuła (języka MRZ), która jest prawdziwa w klasie wszystkich takich struktur modelowych, w których relacja alternatywności jest relacją równoważnościową, jest tezą modalnego rachunku zdań **S5**.*

Wniosek 10.8. *Tezami rachunku **S5** są te – i wszystkie te ! – formuły języka MRZ, które są prawdziwe w każdym świecie dowolnego takiego modelu Kripkego, w którym to modelu relacja alternatywności jest **równoważnościowa**.*

W przypadku epistemicznej ***S5*** sytuacja jest analogiczna. Tym razem relację ***R*** struktury modelowej <***W***, ***R***> interpretujemy jako epistemiczną alternatywność – co nie zmienia nic na poziomie formalnym ☺. Można udowodnić:

Formuła A jest tezą logiki wiedzy ***S5*** *wtw formuła A jest prawdziwa w każdej takiej strukturze modelowej, w której relacja (epistemicznej) alternatywności jest równoważnościowa.*

Sens intuicyjny powyższego twierdzenia staje się jaśniejszy wówczas, gdy weźmiemy pod uwagę, że ma miejsce następujący

Fakt: *Relacja* $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ *jest równoważnościowa w zbiorze* ***W*** *wtw* ***R*** *jest zarazem zwrotna i euklidesowa w zbiorze* ***W***.

Dowód: zapraszam na wykład :)

Zatem zachodzi również następujące twierdzenie:

*Formuła A jest tezą logiki wiedzy **S5** wtw formuła A jest prawdziwa w każdej takiej strukturze modelowej, w której relacja (epistemicznej) alternatywności jest zwrotna i euklidesowa.*

Zwrotność relacji alternatywności jest, jak pamiętamy, gwarantem obowiązywania w logice modalnej formuły **T**, czyli, w konsekwencji, obowiązywania w logice wiedzy każdej formuły postaci $\mathbf{K}A \to A$. Z kolei euklidesowość relacji epistemicznej alternatywności znaczy, że światy epistemicznie alternatywne względem pewnego (dowolnego) świata są również wzajemnie epistemicznie alternatywne.

S5 mamy jeszcze inną bardzo istotną własność. Przypomnijmy:

Twierdzenie 10.21. *Formuła A (języka MRZ) jest tezą rachunku zdań* ***S5*** *wtw formuła A jest prawdziwa w dowolnym modelu Kripkego, w którym relacja alternatywności jest uniwersalna.*

Odpowiednik powyższego twierdzenia obowiązuje rzecz jasna dla logiki wiedzy ***S5***.

Komentarz filozoficzno-kognitywistyczny zostanie podany na wykładzie.

W efekcie semantykę dla ***S5*** możemy znacząco uprościć, pomijając w definicji modelu relację epistemicznej alternatywności (jako że uniwersalność tej relacji w zbiorze możliwych światów ***W*** oznacza, że każdy świat z ***W*** jest epistemicznie alternatywny względem każdego świata z ***W***, w tym względem siebie samego). Modelem będzie teraz para uporządkowana postaci:

($) $$\langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{V} \rangle$$

gdzie ***W*** jest niepustym zbiorem („możliwych światów”), a ***V*** jest funkcją wartościowania określoną dla formuł postaci $\mathbf{K}A$ oraz $\mathbf{M}A$ w niestandardowy sposób, *viz*.

- $\boldsymbol{V}(\mathbf{K}A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$: $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$,
- $\boldsymbol{V}(\mathbf{M}A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ wtw *istnieje* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ *takie, że* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$.

Pozostałe warunki definicji funkcji wartościowania pozostają bez zmian; formuła prawdziwa w modelu postaci ($) to formuła prawdziwa w każdym świecie tego modelu. Można udowodnić, że:

Formuła A jest tezą logiki wiedzy ***S5*** *wtw A jest prawdziwa w każdym modelu postaci* ($).

W efekcie możemy też uprościć metodę tabel analitycznych dla ***S5***, pozbywając się formuł relacyjnych postaci iRj. Reguły dla spójników pozostają bez zmian:

Reguły dla spójników KRZ

$\mathbf{r}_{\neg\neg}$:

$$\frac{\neg\neg A,\ i}{A,\ i}$$

$\mathbf{r}_{\wedge}$:

$$\frac{A \wedge B,\ i}{\begin{array}{c} A,\ i \\ B,\ i \end{array}}$$

$\mathbf{r}_{\neg\wedge}$:

$$\frac{\neg(A \wedge B),\ i}{\neg A,\ i \mid \neg B,\ i}$$

$\mathbf{r}_{\vee}$:

$$\frac{A \vee B,\ i}{A,\ i \mid B,\ i}$$

$\mathbf{r}_{\neg\vee}$:

$$\frac{\neg(A \vee B),\ i}{\begin{array}{c} \neg A,\ i \\ \neg B,\ i \end{array}}$$

$\mathbf{r}_{\rightarrow}$:

$$\frac{A \rightarrow B,\ i}{\neg A,\ i \mid B,\ i}$$

$\mathbf{r}_{\neg\rightarrow}$:

$$\frac{\neg(A \rightarrow B),\ i}{\begin{array}{c} A,\ i \\ \neg B,\ i \end{array}}$$

$\mathbf{r}_{\leftrightarrow}$:

$$\frac{A \leftrightarrow B,\ i}{\begin{array}{c|c} A,\ i & \neg A,\ i \\ B,\ i & \neg B,\ i \end{array}}$$

$\mathbf{r}_{\neg\leftrightarrow}$:

$$\frac{\neg(A \leftrightarrow B),\ i}{\begin{array}{c|c} A,\ i & \neg A,\ i \\ \neg B,\ i & B,\ i \end{array}}$$

Reguły dla modalności są następujące:

$\mathbf{r}_{\neg \mathbf{K}}$:

$$\frac{\neg \mathbf{K}A,\ i}{\mathbf{M}\neg A,\ i}$$

$\mathbf{r}_{\neg \mathbf{M}}$:

$$\frac{\neg \mathbf{M}A,\ i}{\mathbf{K}\neg A,\ i}$$

$\mathbf{r}_{\mathbf{K}}$:

$$\frac{\mathbf{K}A,\ i}{A,\ j}$$

$\mathbf{r}_{\mathbf{M}}$:

$$\frac{\mathbf{M}A,\ i}{A,\ j}$$

gdzie j jest ***nowym***[2] *liczebnikiem*

[2] Tzn. liczebnik *j* nie występuje wcześniej na tej gałęzi (budowanej tabeli analitycznej), na której stosujemy regułę wobec rozważanej formuły indeksowanej **M***A, i* .

Czy *S5* jest „właściwą” logiką wiedzy?

S5 przypisuje wiedzy (wyidealizowanego) podmiotu epistemicznego własność negatywnej introspekcji; jej tezą/aksjomatem jest formuła **5**:

$$\neg \mathbf{K}p \rightarrow \mathbf{K}\neg \mathbf{K}p.$$

Argumentowano, że (w przypadku, gdy rozważanym podmiotem jest człowiek) brak wiedzy o tym, że *p* nie musi współwystępować – i w wielu przypadkach nie współwystępuje! – z wiedzą o tym, że nie wiadomo, że *p*.

Mówienie o współwystępowaniu jest tu o tyle uzasadnione, iż bezpośrednią konsekwencją obowiązywania w ***S5*** formuł **T** oraz **5** jest obowiązywanie formuły:

$$\neg \mathbf{K}p \leftrightarrow \mathbf{K}\neg \mathbf{K}p$$

oraz jej wszystkich podstawień.

Uwaga: gdy rozważamy podmioty nie będące ludźmi, sytuacja jest odmienna. Więcej – na wykładzie.

Nieco bardziej wyrafinowany argument przeciwko przypisywaniu podmiotom epistemicznym – nawet wyidealizowanym – własności negatywnej introspekcji jest następujący.

Przypuśćmy, że *p* nie jest prawdą, jednakże podmiot *a* jest całkowicie przekonany, że *p*. Skoro *p* nie jest prawdą, to formuła $\mathbf{K}p$ – rozumiana jako odnosząca się do wiedzy podmiotu *a* – nie jest prawdą, czyli formuła $\neg\mathbf{K}p$ jest prawdą. Można jednak zasadnie argumentować, że przekonania (*beliefs*), całkowite przekonania (*convictions*) i wiedzę (*knowledge*) podmiotu *a* łączy m.in. następujący związek:

$$\mathbf{C}(a, p) \to \mathbf{B}(a, \mathbf{K}(a, p))$$

Wobec tego, skoro *a* jest całkowicie – chociaż błędnie! - przekonany, że *p*, to *a* jest przekonany, że wie, że *p*, a zatem *nie jest tak, że a wie, że nie wie, że p*. Innymi słowy, w rozważanej sytuacji $\neg\mathbf{K}p$ będzie prawdą, a $\mathbf{K}\neg\mathbf{K}p$ – fałszem.

Mamy (co najmniej) trzy wyjścia:

1. Ignorujemy powyższe argumenty. Wbrew pozorom, jest to wyjście racjonalne, albowiem (epistemiczna) ***S5***, w przeciwieństwie do propozycji alternatywnych, ma wiele zalet, zwłaszcza gdy interesują nas zastosowania.

2. Przyjmujemy, że epistemicznie zinterpretowane logiki ***T*** lub ***S4*** są „właściwymi” logikami wiedzy. W obu z nich nie obowiązuje formuła **5**, będąca źródłem kłopotów. Patrząc filozoficznie, znaczy to, że nie przypisują one podmiotom epistemicznym własności negatywnej introspekcji, nawet w formie ograniczonej.

3. Przyjmujemy, że „właściwą” logiką wiedzy jest jakaś logika silniejsza od ***S4***, ale słabsza od ***S5,*** w której własność negatywnej introspekcji przypisywana jest podmiotom epistemicznym w formie ograniczonej. W tym kontekście przywołuje się zwykle logiki ***S4.2*** i ***S.4.4***.

Budując (epistemiczną) logikę ***S4.2*** w postaci systemu aksjomatycznego, jako aksjomaty specyficzne możemy przyjąć:

K: $\mathbf{K}(p \to q) \to (\mathbf{K}p \to \mathbf{K}q)$

T: $\mathbf{K}p \to p$

4: $\mathbf{K}p \to \mathbf{KK}p$

4.2: $\neg\mathbf{K}\neg\mathbf{K}\mathrm{p} \to \mathbf{K}\neg\mathbf{K}\neg\mathbf{K}p$

natomiast w przypadku ***S4.4*** aksjomatami specyficznymi będą:

K: $\mathbf{K}(p \to q) \to (\mathbf{K}p \to \mathbf{K}q)$

T: $\mathbf{K}p \to p$

4: $\mathbf{K}p \to \mathbf{KK}p$

4.4: $p \wedge \neg\mathbf{K}\neg\mathbf{K}p \to \mathbf{K}p$

Reguły inferencyjne pozostają bez zmian.